

PROBLÈMES DE MAGNÉTODYNAMIQUE DES FLUIDES

HENRI CABANNES

Professeur à la Faculté des Sciences de Paris

La magnétodynamique des fluides est la discipline qui se propose d'étudier l'interaction entre les champs magnétiques et les fluides conducteurs d'électricité. Cette discipline vient unir la mécanique des fluides classique et l'électromagnétisme des milieux en mouvement; elle intéresse donc l'électrodynamicien et l'aérodynamicien. Le premier toutefois envisage des vitesses qui sont de l'ordre de grandeur de la vitesse de la lumière, tandis que le second porte son attention sur des vitesses qui sont de l'ordre de grandeur de la vitesse du son.

L'étude théorique des propriétés d'un fluide peut être abordée par deux voies différentes. La première consiste à supposer que le fluide est constitué par un ensemble discret de particules matérielles; les mouvements des particules sont déterminés par les lois de la mécanique classique et leur nombre est suffisamment grand pour justifier l'application des méthodes de la mécanique statistique. Comme le trop grand nombre de particules ne permet pas, dans la pratique, de donner une description complète de l'état dynamique du système, le problème consiste à prédire son comportement probable à partir d'une description incomplète à un instant donné; cette méthode conduit à la théorie cinétique. La seconde méthode consiste à considérer le fluide comme une répartition continue de matière et à traduire par des équations intégrales les lois physiques qui gouvernent le mouvement. Les deux méthodes sont également valables en magnétodynamique des fluides et ont été appliquées avec succès; elles se complètent de façon satisfaisante. La première permet de découvrir les propriétés physiques du milieu et la seconde fournit des indications sur le mouvement.

Du point de vue physique, les applications de la magnétodynamique des fluides se sont considérablement accrues ces dernières années. Les astrophysiciens se sont penchés les premiers sur ces problèmes, en recherchant l'explication de certains phénomènes relatifs à l'activité solaire et à la création des champs magnétiques interstellaires; dans ce domaine, les fondements furent posés par le professeur H. Alfven, et je suis très ému de prononcer cette conférence dans la ville de Stockholm qui fut le berceau de la magnétodynamique des

fluides. Un deuxième groupe de scientifiques intéressés par ces études est constitué par les spécialistes de l'énergie thermonucléaire; l'étude des interactions entre la mécanique et l'électromagnétisme est primordiale pour la compréhension et la maîtrise des réactions thermonucléaires. Enfin les spécialistes avancés des fusées et des engins (engins balistiques ou satellites) se posent la question de savoir si eux aussi ne pourraient pas être intéressés par cette nouvelle discipline. Les régimes de vol sont tels en effet que les gaz au voisinage des obstacles sont partiellement ionisés et donc conducteurs d'électricité. Les phénomènes de magnétodynamique des fluides vont-ils être importants, quelle sera leur influence, dans quel sens vont-ils jouer, faut-il songer à les produire artificiellement, telles sont les questions qui peuvent se poser aux responsables de l'industrie aéronautique.

Cette conférence n'a pas la prétention d'apporter des réponses définitives à ces questions. Son objectif est beaucoup plus modeste. Les travaux consacrés ces dernières années à la magnétodynamique des fluides sont au nombre de plusieurs milliers et il ne saurait être question pour une seule personne d'en faire une revue, même succincte. Cependant, parmi les problèmes traités, certains nous ont semblé pouvoir intéresser les Sciences Aéronautiques. Ce sont quelques uns de ces problèmes que nous nous proposons d'exposer. Dans une première partie, nous rappelons les équations de la magnétodynamique des fluides, qui sont désormais classiques; une revue préalable des résultats de la théorie cinétique nous permet de préciser la forme sous laquelle il convient de poser les lois physiques qui régissent les phénomènes de viscosité de conductivité thermique et électrique. Ensuite, nous envisageons deux groupes de problèmes; la seconde partie est consacrée aux problèmes posés par la propagation des ondes (ondes simples, stabilité et structure des ondes de choc, problème du dièdre). Dans la troisième partie, nous passons en revue quelques uns des problèmes posés par l'écoulement autour d'un profil. Nous précisons que cette conférence n'a aucune prétention d'originalité; nous avons rassemblé des éléments empruntés à la littérature qui était à notre disposition. Nous avons laissé de côté les études expérimentales, déjà nombreuses, consacrées à la magnétodynamique des fluides.

LES ÉQUATIONS DE LA MAGNÉTODYNAMIQUE DES FLUIDES

L'étude des mouvements d'un fluide conducteur d'électricité soumis à l'action d'un champ magnétique ne peut se faire que si on a précisé au préalable les lois physiques auxquelles obéit le fluide. La forme de certaines de ces lois, et en particulier la façon dont le champ magnétique intervient dans celles-ci, peut être prévue par la théorie cinétique. Une mise en équations doit donc envisager les deux aspects du problème: aspect microscopique et aspect macroscopique.

LES ÉQUATIONS CINÉTIQUES

La théorie cinétique permet de prévoir les propriétés d'un gaz lorsqu'on connaît les fonctions de distribution des vitesses $f_j(t; r, v_j)$ des divers constituants du gaz; t désigne le temps, r la position et v_j la vitesse de la particule

appartenant au constituant de rang j . Les fonctions de distribution des vitesses vérifient un système d'équations de Boltzmann qui sont couplées par l'intermédiaire des termes de collision :

$$\mathfrak{D}_j f_j = \sum_k J(f_j f_k) \quad (1)$$

avec

$$\mathfrak{D}_j f_j = \frac{\partial f_j}{\partial t} + \vec{v}_j \cdot \frac{\partial f_j}{\partial r} + \frac{\vec{X}_j}{m_j} \cdot \frac{\partial f_j}{\partial v_j} \quad (2)$$

$$J(f_j f_k) = \mathcal{J}(f_j' f_k' - f_j f_k) | \vec{v}_j - \vec{v}_k | b db d\epsilon dv_k$$

X_j représente la force extérieure qui s'exerce sur la particule d'espèce j , de masse m_j ; $J(f_j f_k)$ représente les actions des particules d'espèce k sur les particules d'espèce j . Dans le cas de la magnétodynamique des fluides, les constituants sont au nombre de trois: les molécules neutres, les ions et les électrons. En outre la force extérieure X_j est d'origine électromagnétique; elle est due à l'action d'un champ électrique E et d'un champ magnétique H . Les molécules neutres ne sont soumises à aucune force extérieure; les particules chargées, de charge électrique e_j , sont soumises à la force extérieure

$$\vec{X}_j = e_j \{ \vec{E} + \vec{v}_j \times \mu \vec{H} \} \quad (3)$$

μ désigne la perméabilité magnétique.

Les équations cinétiques se simplifient lorsqu'on suppose que certains des trois constituants du gaz jouent un rôle prépondérant; c'est le cas en particulier des gaz faiblement ionisés, qui contiennent très peu d'ions et très peu d'électrons, ou le cas des gaz totalement ionisés, qui ne contiennent pas de molécules neutres. Le calcul des divers coefficients de transfert a pu alors être effectué; sans citer les très nombreux travaux consacrés à cette question, nous indiquerons les résultats obtenus dans le cas d'un gaz totalement ionisé, résultats dus à Chapman et Cowling (1939), à Landshoff (1949), à Braginskii (1957) et à nous-même (Cabannes, 1961). Un tel gaz est un mélange binaire, mais, si on néglige la masse des électrons par rapport à la masse des ions, la partie ionique se comporte comme un gaz simple. L'équation de Boltzmann qui détermine la distribution des vitesses ioniques peut être résolue au voisinage de l'équilibre thermodynamique qui correspond à la distribution des vitesses de Maxwell $f^{(0)}$. La distribution des vitesses ioniques étant écrite sous la forme $f^{(0)} \{1 + \phi\}$, la fonction ϕ vérifie une équation intégral-différentielle linéaire non homogène; la partie indépendante de ϕ est la somme de deux termes, un terme d'origine vectorielle et un terme d'origine tensorielle. Le terme d'origine vectorielle est proportionnel au produit scalaire du gradient de la température par la vitesse d'agitation; le terme d'origine tensorielle est proportionnel au produit tensoriel double du gradient de la vitesse moyenne par le déviateur du dyadique construit à partir de la vitesse d'agitation. La fonction ϕ peut être décomposée en deux

parties, chaque partie correspondant à l'un de ces termes. La première partie de la fonction ϕ peut être développée en série de polynômes de Sonine d'ordre $3/2$, la seconde partie en série de polynômes de Sonine d'ordre $5/2$. La détermination des coefficients de chacune des deux séries se ramène à l'inversion d'un opérateur linéaire dont la matrice est infinie.

LES COEFFICIENTS DE TRANSFERT

A partir de la fonction de distribution des vitesses, il est simple de calculer le flux thermique q et le déviateur P_1 du tenseur des pressions.

$$\begin{aligned}\vec{q} &= \frac{m}{2} \iiint f^{(0)} \phi V^2 \vec{V} dV \\ \vec{P}_1 &= m \iiint f^{(0)} \phi (\vec{V}, \vec{V}) dV\end{aligned}\quad (4)$$

V désigne la vitesse d'agitation, dV l'élément de volume dans l'espace des vitesses et m la masse des ions.

En désignant par h un vecteur unitaire colinéaire au champ magnétique et par T la température absolue, on obtient, pour le flux thermique, l'expression suivante:

$$\begin{aligned}\vec{q} &= -\frac{75T}{8ma_{11}} \left\{ f(0) \frac{\partial T}{\partial r} - g(\omega) \frac{\partial T}{\partial r} \times \vec{h} \right. \\ &\quad \left. + [f(0) - f(\omega)] \left(\frac{\partial T}{\partial r} \times \vec{h} \right) \times \vec{h} \right\}\end{aligned}\quad (5)$$

avec

$$\omega = \frac{15 eH}{4 mn a_{11}}$$

e désigne la charge électrique des ions et n le nombre d'ions par unité de volume. Le coefficient a_{11} et la fonction $f(\omega) + ig(\omega)$ dépendent de la loi d'interaction. Quelle que soit cette loi, les coefficients $g(\omega)$ et $f(0) - f(\omega)$ s'annulent avec le champ magnétique; le flux thermique est donc proportionnel au gradient de la température lorsque H est nul. La fonction $f(\omega)$ est paire, la fonction $g(\omega)$ impaire.

Dans le cas de la loi d'interaction de Maxwell, la force qui s'exerce entre des particules situées à la distance r est égale au produit des masses par Kr^{-5} ; on obtient alors

$$a_{11} = 7.27 \sqrt{\frac{K}{m}} \quad f(\omega) + ig(\omega) = \frac{1}{1 + i\omega}$$

Dans le cas où les ions sont assimilés à des sphères dures de rayon σ (sphères inactives et élastiques), la valeur précédente de la fonction $f(\omega) + ig(\omega)$ constitue une excellente approximation et on doit prendre pour le coefficient a_{11} la valeur suivante:

$$a_{11} = 8\sigma^2 \sqrt{\frac{\pi T}{m}}$$

Ces résultats explicites permettent de voir que seul l'emploi de champs magnétiques particulièrement intenses conduit à des valeurs non négligeables de ω . Dans la pratique, on pourra donc considérer, malgré la présence du champ magnétique, que le flux thermique est proportionnel au gradient de la température.

On peut calculer d'une façon analogue le tenseur P_1 . Dans ce but, il est commode d'introduire le tenseur \vec{W} , égal au déviateur du tenseur symétrique construit à partir du gradient de la vitesse moyenne v_0 .

$$\vec{W} = \frac{\partial v_0}{\partial r} + \frac{\partial \bar{v}_0}{\partial r} - \frac{2}{3} \vec{U} \operatorname{div} \bar{v}_0$$

U désigne le tenseur unité. On introduit également les cinq tenseurs suivants, i désignant un vecteur unitaire orthogonal à h , et j le produit vectoriel $h + i$.*

$$\begin{aligned} \vec{W}_0 &= \frac{3}{2} (\bar{h}, \bar{h}) \{ \vec{W}; (\bar{h}, \bar{h}) \} \\ \vec{W}_1' &= 2 \{ \vec{W} \cdot \bar{h}, \bar{h} \} \\ \vec{W}_1'' &= -2 \{ (\vec{W} \cdot \bar{h}) \times \bar{h}, \bar{h} \} \\ \vec{W}_2' &= \vec{W} - \vec{W}_0 - \vec{W}_1' \\ \vec{W}_2'' &= (\vec{W} \cdot \bar{i}, \bar{j}) - (\vec{W} \cdot \bar{j}, \bar{i}) + \{ (\vec{W} \cdot \bar{h}) \times \bar{h}, \bar{h} \} \end{aligned} \quad (6)$$

On obtient pour le tenseur P_1 l'expression (7)

$$\begin{aligned} \vec{P}_1 &= -\frac{5}{2} \frac{T}{a_{11}} \{ \varphi(0) \vec{W} + \psi(\omega') \vec{W}_1'' + \psi(2\omega') \vec{W}_2'' + \\ & \quad [\varphi(\omega') - \varphi(0)] \vec{W}_1' + [\varphi(2\omega') - \varphi(0)] \vec{W}_2' \} \end{aligned} \quad (7)$$

avec $\omega' = (3/2) \omega$. La fonction $\varphi(\sigma\omega')$ est paire et la fonction $\psi(\sigma\omega')$ impaire; leur valeur explicite ne peut être déterminée que lorsqu'on a précisé la loi d'interaction entre les particules, mais, dans tous les cas, pour $H = 0$, on retrouve la proportionnalité des tenseurs P_1 et \vec{W} .

Pour la loi d'interaction de Maxwell, on obtient

$$\varphi(\sigma\omega') + i\psi(\sigma\omega') = \frac{1}{1 + i\sigma\omega'}$$

Pour la loi dite des sphères dures, cette valeur constitue une excellente approximation: Cabannes (1961). En dehors des cas où le champ magnétique est

* Les notations tensorielles utilisées sont celles définies dans l'ouvrage de Chapman et Cowling, *Mathematical Theory of Nonuniform Gases*.

très intense, on peut négliger les termes infiniment petits avec ω' et considérer que les tenseurs P_1 et W sont proportionnels.

Des études analogues relatives à la partie électronique du gaz permettent de calculer le tenseur de conductivité électrique; dans une première approximation, il peut être assimilé à un tenseur sphérique.

LES ÉQUATIONS MACROSCOPIQUES

La théorie cinétique, qui fait connaître les lois auxquelles obéissent les phénomènes de conductivité thermique, de viscosité et de conductivité électrique, ne permet pas de faire une étude des mouvements d'un fluide, but essentiel de la magnétodynamique des fluides. Il est alors nécessaire d'effectuer une mise en équations sous forme macroscopique.

Les équations macroscopiques sont les unes d'origine mécanique, les autres d'origine électromagnétique. Les premières traduisent le théorème de la quantité de mouvement et les principes de la conservation de la masse et de la conservation de l'énergie; elles s'écrivent sous la forme (8), les intégrales triples étant étendues à un volume (v) constamment formé des mêmes éléments de matière; les particules fluides sont supposées ne pas se mélanger, si bien que la surface (s) du volume (v) est aussi constamment formée des mêmes éléments de matière.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_{(v)} \rho \vec{V} d\tau &= \iiint_{(v)} (\rho \vec{F} + \vec{\phi}) d\tau + \iint_{(s)} \vec{P} \cdot \vec{n} ds \\ \frac{d}{dt} \iiint_{(v)} \rho d\tau &= 0 \\ \frac{d}{dt} \iiint_{(v)} \Lambda d\tau &= \iiint_{(v)} \{ (\rho \vec{F} + \vec{\phi}) \cdot \vec{V} + Q \} d\tau \\ &\quad + \iint_{(s)} \{ (\vec{P} \cdot \vec{n}) \cdot \vec{V} - \vec{\Theta} \cdot \vec{n} \} ds \end{aligned} \tag{8}$$

Les notations sont les suivantes:

- ρ = masse spécifique du fluide
- V = vitesse du fluide
- F = force extérieure d'origine mécanique
- ϕ = force extérieure d'origine électromagnétique
- P = tenseur des pressions
- n = vecteur unitaire normal à la surface (s)
- Λ = énergie spécifique totale
- Q = quantité de chaleur dégagée par effet Joule
- Θ = flux thermique

Le tenseur des pressions P se décompose en $-pU + P_1$, U désignant le tenseur unité et P_1 un tenseur de trace nulle (déviateur du tenseur des pressions). L'énergie spécifique totale s'exprime sous la forme

$$\Lambda = \rho \left(\epsilon + \frac{V^2}{2} \right)$$

ϵ désigne l'énergie spécifique interne, c'est une fonction supposée connue de l'entropie spécifique s et du volume spécifique $\tau = \rho^{-1}$: $\epsilon = \epsilon(s, \tau)$. La température absolue T et la pression p s'expriment sous la forme suivante:

$$T = \frac{\partial \epsilon}{\partial s} \quad p = - \frac{\partial \epsilon}{\partial \tau}$$

L'élimination de l'entropie spécifique entre ces deux relations conduit à l'équation d'état, $p = p(\rho, T)$. Réciproquement, la donnée de l'équation d'état permet de déterminer la fonction $\epsilon(s, \tau)$. Le cas des gaz parfaits ($p = R\rho T$) conduit à $\epsilon = \epsilon(T)$; le cas particulier $\epsilon = \omega T$ ($\omega = \text{constante}$) correspond au cas des gaz polytropiques. Une étude plus détaillée conduit à la thermodynamique des milieux conducteurs que nous n'aborderons pas; on pourra se reporter par exemple à l'ouvrage de Landau et Lifshitz (1960): *electrodynamics of continuous media*.

Les équations d'origine électromagnétique s'écrivent sous la forme (9). La première traduit la loi d'Ampère, la seconde la loi de Faraday. Les intégrales triples sont étendues à un volume (v) fixe et les intégrales doubles à la frontière (s) du volume (v).

$$4\pi \iiint_{(v)} \vec{J} \, d\tau = \iint_{(s)} (\vec{n} \times \vec{H}) \, ds \quad (9)$$

$$\frac{d}{dt} \iiint_{(v)} \mu \vec{H} \, d\tau + \iint_{(s)} (\vec{n} \times \vec{E}) \, ds = 0$$

Les vecteurs E et H représentent les champs électrique et magnétique déjà introduits, le vecteur J est la densité de courant. Les diverses grandeurs électromagnétiques ne sont pas totalement indépendantes; elles vérifient les relations suivantes, qui traduisent respectivement la loi de Laplace, la loi de Joule et la loi d'Ohm.

$$\vec{\phi} = \vec{J} \times \mu \vec{H}$$

$$Q = \sigma^{-1} J^2 \quad (10)$$

$$\vec{J} = \sigma (\vec{E} + \vec{V} \times \mu \vec{H})$$

σ^{-1} désigne la résistivité électrique, nulle dans le cas d'un conducteur parfait, infinie dans le cas d'un isolant parfait qui correspond à l'aérodynamique classique. Dans ces deux cas limites, on a $Q = 0$; dans le premier, la dernière équation devient $E + V \times \mu H = 0$; dans le second, elle devient $J = 0$.

Les équations intégrales (8) et (9) se simplifient lorsque les fonctions inconnues sont continûment différentiables (cas des mouvements continus), ou sont discontinues (cas des phénomènes de choc). Les autres cas sont sans intérêt pratique.

CAS DES MOUVEMENTS CONTINUS

Lorsque les fonctions inconnues sont continûment différentiables, les équations intégrales peuvent être remplacées par des équations aux dérivées partielles. Après quelques transformations, on écrit ces dernières sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho \vec{V}}{\partial t} + \vec{\text{div}} (\rho \vec{V}, \vec{V}) &= \rho \vec{F} + \vec{\phi} + \vec{\text{div}} \vec{P} \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \rho \vec{V} &= 0 \end{aligned} \quad (11)$$

$$\rho T \left(\frac{\partial s}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\text{grad}} s \right) = \vec{P}_1 : \vec{\text{grad}} \vec{V} - \text{div } \vec{\Theta} + Q$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu \vec{H}}{\partial t} + \vec{\text{rot}} \vec{E} &= 0 \\ 4n \vec{J} - \vec{\text{rot}} \vec{H} &= 0 \end{aligned} \quad (12)$$

Les inconnues (scalaires) sont au nombre de 19; elles sont liées par les 11 équations (11), (12). Les lois des phénomènes de conductivité thermique et de viscosité établies par la théorie cinétique permettent d'écrire les huit équations suivantes :

$$\begin{aligned} \vec{\Theta} &= -\lambda \vec{\text{grad}} T \\ \vec{P}_1 &= -\nu \vec{W} \end{aligned} \quad (13)$$

λ et ν désignent deux fonctions connues de la température.

CAS DES PHÉNOMÈNES DE CHOC

Lorsque les fonctions inconnues sont discontinues sur une certaine surface (Σ) appelée onde de choc, on déduit des équations intégrales (8), (9) les relations algébriques vérifiées par les discontinuités. De telles discontinuités ne peuvent exister que dans les deux cas limites $\sigma = 0$, $\sigma^{-1} = 0$. Dans ce dernier cas, on est conduit à des relations qui expriment que les grandeurs (14) demeurent continues à la traversée de l'onde de choc; U désigne la vitesse de déplacement de la surface (Σ) et n le vecteur unitaire normal à (Σ) orienté dans le sens du déplacement.

$$\begin{aligned} H_n \\ (V_n - U) \vec{h} - H_n \vec{v} \\ (V_n - U) \rho \vec{V} + \vec{\pi} \\ (V_n - U) \rho \\ (V_n - U) \left(\frac{\rho V^2}{2} + \rho \epsilon + \frac{\pi H^2}{8\pi} \right) + \vec{\pi} \cdot \vec{V} \end{aligned} \quad (14)$$

avec

$$\begin{aligned} H_n &= \vec{H} \cdot \vec{n} \quad , \quad \vec{h} = \vec{n} \times (\vec{H} \times \vec{n}) \\ V_n &= \vec{V} \cdot \vec{n} \quad , \quad \vec{v} = \vec{n} \times (\vec{V} \times \vec{n}) \\ \pi &= \bar{n}p + \vec{n} \frac{\mu H^2}{8\pi} - \frac{\mu H_n \vec{H}}{4\pi} \end{aligned}$$

En annulant le champ magnétique, on retrouve les équations des chocs relatives au cas de l'aérodynamique classique ($\sigma = 0$).

LA PROPAGATION DES ONDES

Les premiers problèmes résolus en magnétodynamique des fluides furent les problèmes posés par la propagation des ondes. C'est par l'étude de l'influence d'un champ magnétique sur la propagation des perturbations infiniment petites dans un fluide incompressible doué de conductivité électrique que furent posés par Alfvén, dès 1942, les fondements de la magnétodynamique des fluides. Le cas des fluides compressibles fut envisagé par Herfolsen (1950). Les équations des ondes de choc établies par Hoffmann et Teller (1950) et par Lüst (1953). Ces dernières années, de très nombreux résultats furent obtenus par l'école soviétique; pour la bibliographie des travaux soviétiques, on pourra se reporter à un mémoire de synthèse rédigé par Polovin (1960).

LES ONDES SIMPLES

Une classe importante de solutions des équations de la magnétodynamique des fluides est constituée par les ondes simples, solutions pour lesquelles les inconnues sont fonctions de l'une d'entre elles qui dépend de la position et du temps. L'existence d'ondes simples est liée à l'absence de phénomènes de dissipation ($\lambda = \nu = 0$, $\sigma = 0$ ou $\sigma^{-1} = 0$); le cas qui intéresse la magnétodynamique des fluides est celui d'une résistivité électrique négligeable. La recherche des ondes simples conduit aux mêmes équations que la discussion du problème de Cauchy, c'est pourquoi les ondes simples se propagent à la même vitesse que les discontinuités du premier ordre. On rencontre trois types d'ondes simples:

LES ONDES MAGNÉTOAÉRODYNAMIQUES OU ONDES D'ALFVEN

Leur vitesse de propagation dans la direction de vecteur unitaire n est

$$U_n = \vec{U} \cdot \vec{n} \quad \text{avec} \quad \vec{U} = \vec{H} \sqrt{\frac{\mu}{4\pi\rho}}$$

Les grandeurs qui caractérisent l'état du fluide vérifient les relations suivantes:

$$\begin{aligned} H_n &= \vec{H} \cdot \vec{n} = \text{constante}, & V_n &= \vec{V} \cdot \vec{n} = \text{constante} \\ \rho &= \text{constante}, & p &= \text{constante} \\ h^2 &= \text{constante} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} d\vec{v} \pm d\vec{h} \sqrt{\frac{\mu}{4\pi\rho}} &= 0 \\ \vec{h} &= \vec{n} \times (\vec{H} \times \vec{n}) \\ \vec{v} &= \vec{n} \times (\vec{V} \times \vec{n}) \end{aligned} \right\}$$

H_n et \vec{h} représentent les composantes du champ magnétique normale et tangente aux ondes simples; V_n et v représentent les composantes analogues de la vitesse.

LES ONDES MAGNÉTOACOUSTIQUES

Les ondes magnétoacoustiques se propagent soit avec la vitesse U_- (ondes lentes), soit avec la vitesse U_+ (ondes rapides):

$$2 U_{\pm}^2 = U^2 + c^2 \pm \sqrt{(U^2 + c^2)^2 - 4c^2 U_n^2}$$

avec

$$c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s$$

Les différentes grandeurs vérifient les relations suivantes: ($\epsilon = \pm 1$)

$$\frac{dV_n}{d\rho} = \epsilon \frac{U_{\pm}}{\rho} \quad H_n = \text{constante} \quad s = \text{constante}$$

$$\frac{d\vec{v}}{d\rho} = - \frac{\epsilon H_n \vec{h} U_{\pm}}{4 \pi \rho^2 (U_{\pm}^2 - U_n^2)}$$

$$\frac{d\vec{h}}{d\rho} = \frac{U_{\pm}^2 \vec{h}}{\rho (U_{\pm}^2 - U_n^2)}$$

LES ONDES D'ENTROPIE

Les ondes d'entropie sont stationnaires; elles se déplacent en même temps que le fluide et n'ont pas de vitesse de propagation. La pression, les vecteurs V et H demeurent constants.

L'importance des ondes simples réside dans le fait que, dans toute région adjacente à une région d'écoulement uniforme, le mouvement du fluide est un écoulement par ondes simples. Les ondes homothétiques (ondes planes, ondes cylindriques, ondes sphériques) constituent un cas particulier important d'ondes simples. Les phénomènes sonores, constitués par des discontinuités de pression, se propagent avec l'une des deux vitesses U_- ou U_+ . L'intégration des équations des ondes simples magnétoacoustiques se ramène à des quadratures, Bazer (1958).

LES ONDES DE CHOC

Les équations des chocs ont été écrites au-dessus; elles expriment qu'un certain nombre de quantités demeurent continues à la traversée de l'onde de choc. L'énergie spécifique interne ϵ est une fonction supposée connue de l'entropie spécifique et du volume spécifique.

Les conditions, dites d'Herman Weyl, imposées à la fonction $p = p(\tau, S)$, soit

$$\frac{\partial p}{\partial \tau} < 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 p}{\partial \tau^2} > 0 \quad , \quad \frac{\partial p}{\partial S} > 0$$

conduisent, en aérodynamique, à des propriétés classiques relatives aux ondes de choc. L'intensité du choc étant définie par la discontinuité de pression supposée infiniment petite et adoptée comme infiniment petit principal, on établit les résultats suivants:

- L'accroissement de l'entropie spécifique est un infiniment petit du troisième ordre—les équations des chocs coïncident au troisième ordre près avec celles d'une transformation adiabatique—les chocs sont des compressions. Par rapport à l'onde de choc, la vitesse normale du fluide est supersonique avant le choc, subsonique après le choc.

Dans le cas de la magnétodynamique des fluides, Landau et Lifshitz (1960) ont pu démontrer que les résultats précédents étaient encore valables lorsque l'intensité du choc demeure faible; le cas général a été étudié par Iordanskii (1958).

L'étude des équations de choc a été faite par Helfer (1953), par Lüst (1955), par Friedrichs et Kanzer (1958) et par Bazer et Ericson (1959). L'onde de choc est caractérisée par les valeurs de toutes les grandeurs avant le choc: H_1 , V_1 , p_1 et ρ_1 et par la valeur de l'une de ces quantités, par exemple ρ_2 , après le choc. La courbe $p_2 = f(\rho_2^{-1})$ est appelée polaire de choc. Dans un système d'axes liés au choc tels que la vitesse soit parallèle au champ magnétique et perpendiculaire à l'axe des z , l'équation de la polaire de choc possède la forme suivante:

$$\epsilon_2 - \epsilon_1 + \left\{ \frac{p_2 + p_1}{2} + \frac{(H_{2y} - H_{1y})^2}{16\pi} \right\} \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1} \right) = 0 \quad (15)$$

avec

$$H_{2y} = H_{1y} \frac{\rho_2 (V_{1x}^2 - U_{1x}^2)}{\rho_1 V_{1x}^2 - \rho_2 U_{1x}^2}$$

L'énergie spécifique interne ϵ est une fonction connue de R et ρ .

D'après leur comportement lorsque l'intensité tend vers zéro, les chocs peuvent être classés en chocs lents et chocs rapides; on est amené en outre, dans le cas des gaz polytropiques, à distinguer deux types de chocs lents et deux types de chocs rapides:

	type (1)	$\bar{s}_1 \geq 1 - \gamma \sin \theta_1$
chocs lents	type (2)	$\bar{s}_1 < 1 - \gamma \sin \theta_1$
	type (1)	$\bar{s}_1 \geq 1 - \frac{\gamma \sin \theta_1}{\gamma - 1}$
chocs rapides	type (2)	$\bar{s}_1 < 1 - \frac{\gamma \sin \theta_1}{\gamma - 1}$

$\bar{s} = \gamma p / \mu H^2$, θ est l'angle du champ magnétique avec la normale à l'onde de choc; γ désigne l'indice adiabatique. Dans un choc rapide, le maximum de la discontinuité de masse spécifique est $2\rho_1 / (\gamma - 1)$; la variation de la discontinuité du champ magnétique en fonction de la discontinuité de masse spécifique peut présenter deux aspects. Pour les chocs rapides du type (1), cette variation est monotone; pour les chocs rapides du type (2), lorsque la discontinuité

de masse spécifique augmente, la discontinuité de champ magnétique croît d'abord de zéro jusqu'à un certain maximum et décroît ensuite jusqu'à la valeur $2H_{1y}/(\gamma - 1)$.

Dans un choc rapide très intense, la présence du champ magnétique a peu d'influence sur les effets du choc; en particulier, la plus grande compression possible est

$$\rho_2/\rho_1 = (\gamma + 1)/(\gamma - 1)$$

Un choc lent par contre ne peut pas avoir une intensité arbitrairement grande, si bien que, lorsque la discontinuité de pression est très grande, un seul choc peut exister, le choc rapide.

LA STABILITÉ DES ONDES DE CHOC

Les problèmes d'écoulement avec ondes de choc possèdent en général plusieurs solutions. Alors qu'en aérodynamique la condition d'augmentation de l'entropie spécifique suffit à éliminer les chocs superflus, il est nécessaire, en magnétodynamique des fluides, d'ajouter à cette condition des considérations de stabilité; seules les discontinuités stables possèdent une existence physique.

La stabilité des ondes de choc planes a été étudiée par Akhiezer, Liubarskii et Polovin (1959), en ce qui concerne les petites perturbations qui dépendent seulement de la distance à l'onde de choc et du temps. La condition de stabilité de l'onde de choc par rapport à ces perturbations est l'existence d'une solution unique pour le problème de Cauchy relatif aux équations linéarisées de la magnétodynamique des fluides. Pour qu'une onde de choc soit stable, il est donc nécessaire que, dans la rencontre des perturbations infiniment petites et du choc, le nombre des ondes issues du choc soit égal au nombre des conditions aux limites à satisfaire sur l'onde de choc. Cette condition nécessaire devient suffisante lorsqu'il est possible de satisfaire les conditions aux limites à l'aide des constantes arbitraires qui demeurent dans les équations.

Nous considérons donc une onde de choc stationnaire située dans le plan $x = 0$; elle sépare l'espace en deux régions: région (1) à gauche ($x < 0$), région (2) à droite ($x > 0$). Les perturbations infiniment petites se propagent avec l'une des quatre vitesses suivantes: U (ondes magnétoaérodynamiques ou ondes d'Alfven), U_- et U_+ (ondes magnétoacoustiques lentes et rapides), vitesse nulle (ondes d'entropie). Les vitesses de propagation vérifient les inégalités $U_- \leq U \leq U_+$. Les vitesses de déplacement des perturbations infiniment petites sont au nombre de sept pour chacune des deux régions (1) et (2). La vitesse V_x du fluide normale au choc étant supposée positive, les ondes qui se déplacent avec l'une des vitesses $V_x, V_x + U_-, V_x + U, V_x + U_+$ convergent vers l'onde de choc dans la région (1) et divergent dans la région (2). Les conditions aux limites qui relient les valeurs des perturbations de part et d'autre de l'onde de choc sont au nombre de sept (équations 14, relatives aux inconnues h, V, p et ρ): comme la vitesse du choc figure dans ces équations, on obtient en l'éliminant six conditions aux limites qui doivent être satisfaites pour $x = 0$. Par conséquent, dans le cas de la stabilité, deux des six ondes qui se déplacent avec l'une des vitesses $V_{ix} - U_{i-}, V_{ix} - U_i, V_{ix} - U_{i+}$ ($i = 1, 2$) doivent être divergentes.

Il en résulte que l'onde de choc ne peut être stable que dans l'un des trois cas suivants:

- (a) $U_{1-} < V_{1x} < U_1$, $V_{2x} < U_{2-}$
 (b) $U_1 < V_{1x} < U_{1+}$, $U_{2-} < V_{2x} < U_2$
 (c) $U_{1+} < V_{1x}$, $U_2 < V_{2x} < U_{2+}$

Les conditions précédentes sont des conditions nécessaires de stabilité, mais seules les conditions (a) et (c) sont également suffisantes. En effet les sept équations du choc peuvent être séparées en deux groupes indépendants, correspondant à deux familles d'ondes qui doivent être stables séparément; il en est ainsi dans les régions *A* et *C*, mais non dans la région *B*.

Ces conditions se simplifient lorsque le champ magnétique est parallèle à l'onde de choc. Dans le cas où le champ magnétique est perpendiculaire à l'onde de choc, les conditions aux limites se décomposent en trois groupes, qui correspondent à trois types d'ondes simultanées; il est alors nécessaire d'étudier la stabilité de chaque type d'onde pris individuellement (Fig. 1).

Lorsque les discontinuités de toutes les grandeurs sur la surface du choc tendent vers zéro, les vitesses des ondes de choc tendent vers les vitesses des ondes linéarisées; cette remarque a permis une classification des ondes de choc en ondes lentes et en ondes rapides. Les conditions de stabilité conduisent alors à des conséquences importantes. Si deux ondes de choc du même type se suivent, l'onde arrière rattrape l'onde avant; en ce qui concerne des ondes de types différents, une discontinuité d'Alfvén rattrape toujours une onde de choc lente, tandis qu'une onde de choc rapide rattrape toutes les autres discontinuités. Il en résulte en particulier que deux chocs au plus peuvent se propager ensemble sans se rattraper mutuellement; entre les deux chocs peuvent se propager des discontinuités d'Alfvén.

D'un autre point de vue, on peut remarquer que seules les régions stables de la polaire de choc possèdent une réalité physique. Il en résulte par exemple que le champ magnétique transverse, qui conserve sa direction à travers un choc, augmente dans un choc rapide et diminue dans un choc lent. Les champs magnétiques faibles ($H_x^2 < 4\pi\rho V_x^2$) augmentent au passage d'une onde de choc, tandis que les champs magnétiques forts ($H_x^2 > 4\pi\rho V_x^2$) diminuent. Ainsi, après le passage d'un grand nombre de chocs répartis au hasard, un équilibre apparaît, qui conduit à l'égalité

$$H_x^2 = 4\pi\rho V_x^2$$

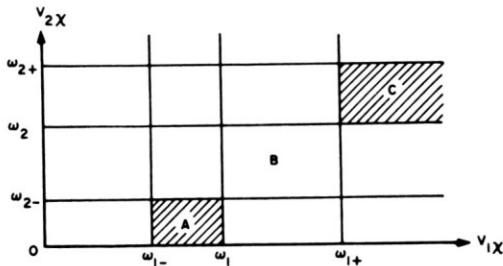


Fig. 1.

LA STRUCTURE DES ONDES DE CHOC

La théorie classique des ondes de choc comprend deux séries de résultats établis dans des conditions fort générales. D'une part la discussion sur l'existence et les propriétés des ondes de choc considérées comme phénomènes de discontinuités, d'autre part la schématisation d'un phénomène physique plus complexe. L'écoulement discontinu représente la limite d'un écoulement qui, dans un domaine de faible épaisseur, est le siège d'un équilibre entre des effets non linéaires d'origine dynamique et des effets opposés de dissipation. Etudier la structure des ondes de choc, c'est effectuer l'étude locale de ces écoulements continus à gradients élevés en présence de mécanismes de dissipation, et déterminer la limite de ces écoulements lorsque les divers coefficients de dissipation tendent vers zéro. Du point de vue mathématique, l'étude la plus complète de cette question semble être celle de Gilbarg (1951). La structure des ondes de choc en magnétodynamique des fluides fut envisagée pour la première fois par Marshall (1955). Burgers (1957), Ludford (1959), Germain (1959) ont ensuite repris ces questions.

Puisqu'il s'agit d'une étude locale aussi bien dans le temps que dans l'espace, on peut se contenter d'examiner des écoulements unidimensionnels stationnaires. La mise en équations du problème conduit à quatre équations différentielles liant les quatre inconnues indépendantes, deux composantes de vitesse, la température et le champ magnétique; ces équations font intervenir les quatre coefficients de dissipation: les deux coefficients de viscosité, le coefficient de conductivité thermique et la résistivité électrique. L'introduction de la fonction caractéristique \mathfrak{D} d'une énergie de dissipation généralisée et d'un potentiel thermodynamique généralisé \mathfrak{M} a permis à Germain (1959) d'écrire les équations sous une forme canonique

$$\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial q_i} = \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial q_i} \quad \dot{q}_i = \frac{dq_i}{dx} \quad (16)$$

$$\mathfrak{M}(x_2) - \mathfrak{M}(x_1) = 2 \int_{x_1}^{x_2} \mathfrak{D} dx \quad (17)$$

La recherche des écoulements définis pour toute valeur de x et tels que toutes les grandeurs physiques restent bornées revient à trouver dans l'espace des quatre variables q_i un arc de courbe intégrale (L) du système (16) joignant deux points S_j et S_k tels que, lorsque le point de coordonnées q_i parcourt cet arc, x varie de façon monotone de $-\infty$ à $+\infty$. Les points S susceptibles d'être les extrémités d'un arc de courbe intégrale (L) rendent la fonction \mathfrak{M} stationnaire, et l'entropie spécifique à l'origine ($x = -\infty$) d'un arc (L) est au plus égale à l'entropie spécifique à l'extrémité ($x = +\infty$). On doit donc trouver les points $S_1, S_2, S_3 \dots$ qui rendent \mathfrak{M} stationnaire et les classer par entropie spécifique non décroissante $s(S_p) \leq s(S_{p+1})$; il faut ensuite chercher s'il existe un arc (L) joignant un point S_j à un point S_k ($j < k$). Les chocs pour lesquels un tel arc de courbe existe seront appelés chocs "stables" d'après Germain.

Il peut exister au plus quatre points S . Chacun des états correspondants est caractérisé par la valeur de la vitesse normale u , relativement aux célérités U_- (onde magnétoacoustique lente), U_n (onde d'Alfvén) et U_+ (onde magnétoacoustique rapide).

$$\begin{array}{ll} S_1 & u \geq U_+ \\ S_2 & U_+ \geq u \geq U_n \\ S_3 & U_n \geq u \geq U_- \\ S_4 & U_- > u \end{array}$$

Les points S_1, S_2, S_3, S_4 sont classés suivant l'ordre d'entropie spécifique croissante. L'étude du système (16) conduit aux conclusions suivantes:

(a) Le choc rapide est stable. Il existe en effet une intégrale (L) et une seule assurant le passage de l'état S_1 (pour $x = -\infty$) à l'état S_2 (pour $x = +\infty$).

(b) Les chocs intermédiaires, à l'exception du choc transversal sont instables. Dans le cadre de la théorie des fluides parfaits, il est possible d'envisager un choc reliant un état amont S_j ($j = 1, 2$) à un état aval S_k ($k = 3, 4$); mais, dans un schéma avec dissipation, aucun arc de courbe (L) ne relie deux tels points. Il y a exception lorsque le champ électrique est nul.

(c) Dans le cas du choc lent (passage de S_3 à S_4), on peut imaginer des exemples dans lesquels ce choc est instable. Il peut arriver également que, quels que soient les coefficients de dissipation, le choc soit stable (Fig. 2). Il est impossible de conclure de façon générale.

En magnétodynamique, on ne peut donc se contenter, même en fluide parfait, d'une théorie où seraient seules écrites les équations de chocs et l'inégalité d'entropie. Un tel point de vue conduirait à trop de chocs possibles et donc à prévoir plusieurs solutions à un problème d'écoulement néanmoins bien posé. La question de la stabilité comporte toujours un certain arbitraire. La théorie établie par Akhiezer, Liubarskii et Polovin et exposée dans la section précédente

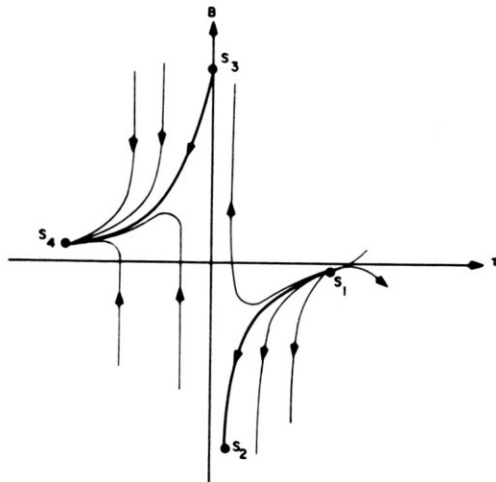


Fig. 2.

se développe dans le cadre des fluides parfaits et de résistivité électrique négligeable. Les résultats sont en accord avec ceux de Germain pour ce qui concerne le choc rapide et les chocs intermédiaires; par contre, le choc lent, qui peut être instable d'après le critère de Germain, est toujours stable du point de vue adopté par Akhiezer, Liubarskii et Polovin.

LE PROBLÈME DU DIÈDRE

Le problème de l'écoulement autour d'un dièdre est un des rares problèmes d'écoulement avec onde de choc qui, dans le cas de la magnétodynamique des fluides, ont pu être résolus de façon exacte. Le cas du champ magnétique colinéaire à la vitesse est le plus simple; leur direction commune étant située dans le plan bissecteur du dièdre et perpendiculaire à l'arête, l'angle β que fait le plan du choc avec le plan bissecteur dépend du demi-angle θ du dièdre, du nombre de Mach x , du quotient ϵ du nombre de Mach par le nombre d'Alfvén et, pour un gaz polytropique, du rapport γ des chaleurs spécifiques.

$$f(\tan \beta, \tan \theta, x^2, \epsilon^2, \gamma) = 0$$

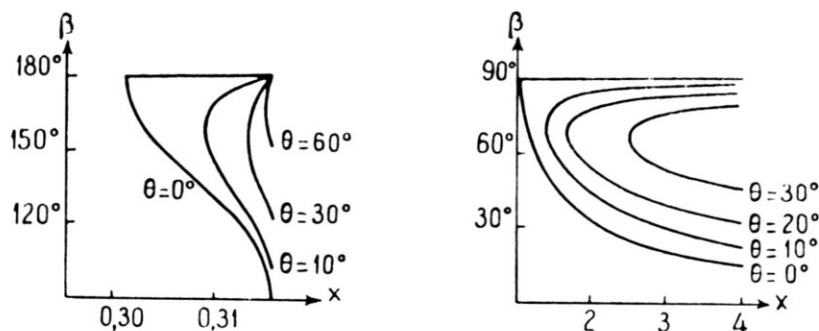
avec

$$x^2 = \frac{\rho V^2}{\gamma p} \quad \epsilon^2 = \frac{\mu H^2}{4\pi \gamma p} \quad (18)$$

L'équation (18), linéaire en γ , bicarrée en x et ϵ , est du troisième degré en $\tan \theta$ et du cinquième degré en $\tan \beta$, Cabannes (1960). On peut donc obtenir cinq chocs. L'introduction des inégalités (a) dans les équations de choc, conduit à ne conserver, dans les courbes de choc $\beta = \beta(x)$ (γ , ϵ^2 , θ fixés), définies par l'équation (18), que les arcs limités par les chocs destructeurs (the switch-off shocks); en ces chocs, on a :

$$\text{soit } x = \epsilon, \quad \beta = \frac{\pi}{2} + \theta \quad (\text{choc destructeur faible}),$$

$$\text{soit } x = \epsilon, \quad \beta = \pi \quad (\text{choc destructeur fort}).$$



Choc lent.

Choc rapide.

Champ magnétique faible; $\gamma = 7/5$; $\epsilon^2 = 0.1$.

Fig. 3.

Les chocs destructeurs limitent les arcs des courbes de choc représentant les chocs lents (fig. 3 et 4). Quel que soit le demi-angle du dièdre (angle aigu), le choc lent existe dès que x appartient à un certain intervalle $x_m(\theta, \epsilon^2, \gamma) \leq x \leq \epsilon$. Le choc lent n'apparaît que dans les écoulements subalfvéniques et l'angle β correspondant à un choc lent est toujours obtus.

L'introduction des inégalités (c) dans les équations de choc, conduit à ne conserver dans les courbes de choc que les arcs limités par les chocs créateurs (the switch-on shocks).

Les chocs créateurs, qui ne correspondent à un accroissement d'entropie que pour $\epsilon^2 > 1$, limitent les arcs de courbes de choc représentant les chocs rapides. Lorsque le champ magnétique est faible, le choc rapide ne peut exister que pour $\theta < \arcsin \gamma^{-1}$ (fig. 3). Lorsque le champ magnétique est fort, le choc rapide peut exister pour $\theta \leq \arctan \{(1 - \epsilon^{-2})(\gamma - 1)^{-1/2}\}$ (fig. 4). Le choc rapide n'apparaît que dans les écoulements superalfvéniques et l'angle β correspondant à un choc rapide est toujours aigu, Cabannes (1964).

Dans un plan (θ, x) , les régions qui correspondent à des valeurs de θ et x pour lesquelles existe une onde de choc attachée sont limitées par des courbes qui dépendent des paramètres ϵ^2 et γ . Le Fig. 5 montre la disposition des courbes pour $\epsilon^2 < 1$ et pour $\epsilon^2 > 1$.

Lorsqu'on s'intéresse aux effets du champ magnétique sur la traînée et la température sur le dièdre, on trouve que la présence du champ magnétique provoque une augmentation de la traînée et une diminution de la température lorsque la valeur de x^2 est largement supérieure à la valeur pour laquelle se produit l'attachement du choc. Au voisinage de la vitesse d'attachement, les conclusions sont inversées.

Lorsque, la vitesse ayant toujours la même direction, le champ magnétique est incliné sur la vitesse, on peut se ramener au cas précédent par changement d'axes. Si le champ magnétique est parallèle à l'arête du dièdre, il y a lieu

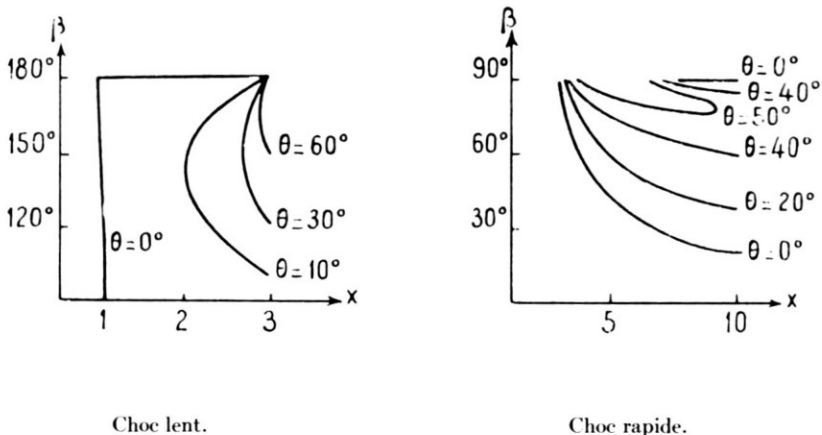


Fig. 4.

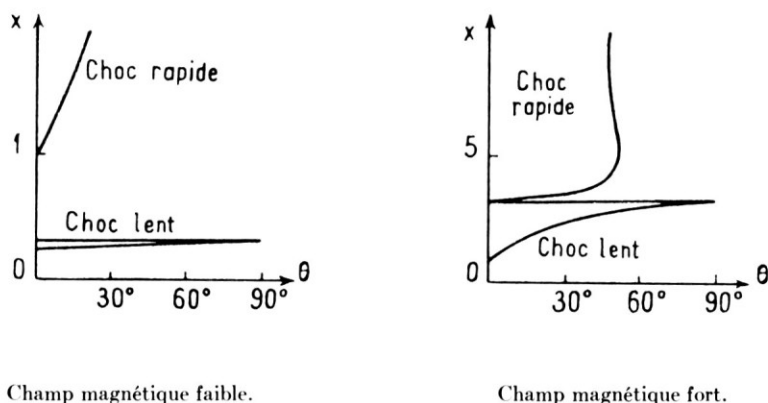


Fig. 5. Attachement et détachement des chocs; $\gamma = 7/5$.

toutefois de faire une étude directe, qui conduit d'ailleurs à des conclusions analogues.

Un point important qu'il y a lieu de préciser est celui des conditions aux limites de type magnétique. Tous les cas envisagés correspondent à un champ magnétique parallèle à la surface du dièdre.

LES ÉCOULEMENTS AUTOUR D'UN PROFIL

Avec les problèmes relatifs à la propagation des ondes, les questions les plus importantes pour les ingénieurs de l'aéronautique sont les questions posées par les écoulements autour des profils. L'analogie entre les équations de la magnéto-dynamique des fluides et celles de l'aérodynamique a permis d'envisager l'extension au cas de la magnéto-dynamique des fluides des méthodes qui avaient été employées avec succès en aérodynamique.

CAS DE RÉDUCTION DES ÉQUATIONS

Pour certains écoulements particuliers, il est possible de ramener, par une correspondance mathématique, les équations de la magnéto-dynamique des fluides aux équations de l'aérodynamique. La première étude faite dans ce sens est celle de Mitchner (1959); elle concerne le cas des écoulements stationnaires bidimensionnels d'un fluide compressible parfaitement conducteur, soumis à un champ magnétique normal au plan de l'écoulement. Lorsque le champ magnétique est très grand, les équations sont identiques à celles de l'aérodynamique, pour un gaz dont la constante adiabatique posséderait la valeur $\gamma = 2$; la vitesse de propagation du son a doit être remplacée par la vitesse de propagation des petites perturbations c :

$$a^2 = \frac{dp}{d\rho} \quad c^2 = \frac{d}{d\rho} \left(p + \frac{\mu H^2}{8\pi} \right)$$

A toute solution pour un problème d'aérodynamique correspond une solution pour le problème analogue de magnétodynamique des fluides.

Le même type d'écoulement a été repris par Grad (1960), qui a défini une analogie de portée plus générale. Le champ magnétique étant normal au plan de l'écoulement, le quotient s de l'induction par la masse spécifique demeure constant lorsqu'on suit une molécule fluide dans son mouvement. L'introduction des variables

$$\bar{p} = p + \frac{B^2}{2\mu} \quad \bar{\epsilon} = \epsilon + \frac{B^2}{2\mu\rho}$$

conduit à des équations identiques à celles de l'aérodynamique à condition de supposer que \bar{s} est une fonction de s , $s = g(s)$. Les grandeurs \bar{p} , ρ et s définissent un gaz fictif, qui admet l'équation d'état

$$\bar{p}(\rho, s) = p(\rho, s) + \frac{\rho^2 g^2(s)}{2\mu}$$

La vitesse du son est alors donnée par

$$\bar{c}^2 = \frac{\partial \bar{p}}{\partial \rho} = \frac{\partial p}{\partial \rho} + \frac{\rho \bar{s}^2}{\mu}$$

Une relation $\bar{s} = g(s)$ existe en particulier dans les cas suivants:

- 1° Écoulements unidimensionnels, non stationnaires.
- 2° Écoulements bidimensionnels, stationnaires.
- 3° La fonction $\bar{s}(t, x, y)$ est indépendante des coordonnées x et y à l'instant initial.
- 4° Écoulements isentropiques.

Parmi les autres types d'écoulement qui peuvent être étudiés d'une façon analogue, il faut citer les écoulements à champs alignés, écoulements stationnaires d'un fluide compressible parfaitement conducteur soumis à des effets magnétiques tels que le champ magnétique et la vitesse soient constamment colinéaires. Les cas isentropique a été envisagé par Imaï (1960) et le cas non isentropique par Peyret (1961). L'analogie obtenue par Peyret est valable aussi bien pour les écoulements continus que pour les écoulements comportant des ondes de choc. L'induction colinéaire à la vitesse s'exprime sous la forme

$$\vec{B} = \lambda \rho \vec{V}$$

est une constante sur chaque ligne de courant. La fonction $\omega_1 = \lambda^2 \mu^{-1}$ est homogène à un volume spécifique et ne dépend que de l'entropie spécifique s . Le fluide fictif non conducteur est alors défini par les grandeurs représentées par les symboles surlignés suivants:

$$\bar{\rho} \vec{V} = \vec{B} / \sqrt{\mu \omega_1}$$

$$\bar{\omega} = \omega - \omega_1 \quad \omega = \rho^{-1}$$

$$\bar{p} = p + B^2/2\mu$$

$$\bar{s} = s$$

$$\bar{\epsilon} = \left(1 - \frac{\omega_1}{\omega}\right)\epsilon + \frac{\omega_1}{\omega} h_0$$

$h_0(s)$ désignant l'enthalpie génératrice. L'introduction des grandeurs surlignées permet de ramener les équations de la magnétodynamique des fluides à la forme suivante:

$$\iint_{(s)} \{\bar{\rho} \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{n}) + \bar{p} \vec{n}\} d\sigma = 0$$

$$\iint_{(s)} \bar{\rho} \vec{V} \cdot \vec{n} d\sigma = 0$$

$$\iint_{(s)} \left\{ \bar{\epsilon} + \frac{\bar{p}}{\rho} + \frac{\vec{V}^2}{2} \right\} \bar{\rho} \vec{V} \cdot \vec{n} d\sigma = 0$$

équations qui expriment le théorème des quantités de mouvement, la conservation de la masse et celle de l'énergie dans un écoulement pour le fluide fictif. La correspondance est singulière pour $\omega = \omega_1$, et le volume spécifique $\bar{\omega} du$ fluide fictif devient négatif pour $\omega < \omega_1$. Pour prolonger la correspondance pour ces valeurs, il suffirait de compléter les résultats de l'aérodynamique classique.

Un cas de réduction remarquable a été étudié par Hasimoto (1959). Ce cas concerne l'écoulement stationnaire d'un fluide visqueux conducteur parfait autour d'un obstacle quelconque à deux dimensions ou à symétrie axiale; lorsque le champ magnétique est colinéaire à la vitesse et que cette dernière est inférieure à la vitesse d'Alfvén, Hasimoto a établi que l'écoulement est lié à l'écoulement visqueux conventionnel (non conducteur) autour du même obstacle par une transformation simple dans laquelle le vecteur vitesse est multiplié par une constante négative. Cette étude explique le fait que la couche limite augmente d'épaisseur à partir du point de stagnation arrière et se transforme ensuite en un sillage orienté vers l'amont.

LES ÉCOULEMENTS INCOMPRESSIBLES

L'étude des écoulements incompressibles en magnétodynamique des fluides a été abordée par diverses voies. Certains auteurs ont développé la théorie des petites perturbations; le fluide est non visqueux, parfaitement conducteur, et l'écoulement a lieu autour d'un profil non conducteur. D'autres auteurs ont essayé de construire des écoulements, en cherchant des solutions voisines de solutions exactes relatives au cas de l'aérodynamique; l'écoulement autour d'une sphère a été étudié de cette façon.

ÉCOULEMENTS STATIONNAIRES

Sears et Resler (1959) ont étudié par la méthode des petites perturbations l'écoulement stationnaire autour d'un profil. La conductivité électrique étant infinie, le champ magnétique et la vitesse, parallèles à l'infini, sont parallèles dans tout l'écoulement, qui est alors irrotationnel. Le champ des vitesses est le même que pour un fluide non conducteur, mais des différences importantes apparaissent dans les efforts exercés sur le profil; la naissance de courants électriques, "courants de surface," sur la surface des obstacles contribue à ces efforts.

Lorsque le profil est sans épaisseur, l'écoulement peut être représenté par une ligne de tourbillons. La portance a pour valeur

$$P = -\rho V_\infty \{u(x_1, -0) - u(x_1, +0)\} + H_\infty \{h_x(x_1, -0) - h_x(x_1, +0)\}$$

u et h_x désignent les composantes sur la direction de l'écoulement de la vitesse et du champ magnétique de perturbation. Le dernier terme $H_\infty \{h_x(x_1, -0) - h_x(x_1, +0)\}$ est dû au courant de surface. Le coefficient de portance a pour valeur

$$C_z = C_z^0 \frac{A_\infty^2 - 1}{A_\infty^2}$$

C_z^0 désigne le coefficient de portance pour le même profil, placé dans un écoulement de même vitesse, pour un fluide non conducteur. A_∞ représente le nombre d'Alfvén à l'infini (quotient de la vitesse du fluide par la vitesse d'Alfvén).

Lorsque le profil est symétrique, l'écoulement peut être représenté par une distribution de sources. La détermination des efforts sur le profil exige le calcul du champ magnétique à l'intérieur du corps. Le champ magnétique à l'intérieur du profil est le gradient d'une fonction harmonique; comme la composante normale est nulle sur le contour à cause de la continuité de l'induction magnétique normale, cette fonction harmonique est nulle. Le courant de surface est alors

$$J_s = -\frac{1}{4\pi} (H_\infty + h_x) = -\frac{H_\infty}{4\pi} \left(1 + \frac{u}{V_\infty}\right)$$

et les efforts correspondants sont des infiniment petits du second ordre et ne peuvent être calculés par la théorie linéaire.

ÉCOULEMENTS NON STATIONNAIRES

Les résultats précédents supposent essentiellement que la vitesse et le champ magnétique sont constamment parallèles et que les conditions à l'infini ne sont pas perturbées par la présence de l'obstacle. La validité de ces hypothèses a été mise en doute par Stewartson (1960). Stewartson pense qu'il est indispensable, dans l'étude d'un écoulement stationnaire, d'envisager la façon dont cet écoulement a été obtenu. A l'instant initial, un fluide au repos est mis en mouvement avec une vitesse constante; au même instant, ou à un instant antérieur, un champ magnétique uniforme est appliqué. L'écoulement qui prend naissance est non stationnaire et sa limite, lorsque le temps augmente indéfiniment, sera

stationnaire. En aérodynamique, l'écoulement limite ainsi obtenu ne présente pas de phénomènes particuliers; en magnétodynamique des fluides, les conclusions obtenues par Stewartson sont surprenantes. Stewartson démontre en effet que l'hypothèse des petites perturbations n'est plus vérifiée; car la composante h_x ne demeure pas petite au voisinage de l'obstacle et que, dans certains cas, les perturbations peuvent remonter vers l'amont et y modifier les conditions à l'infini. Ces phénomènes sont dûs essentiellement au fait que le champ magnétique ne reste pas parallèle à la vitesse et que des ondes qui prennent naissance sur l'obstacle se propagent le long des lignes de force magnétiques avec une vitesse égale à celle d'Alfvén. Les phénomènes diffèrent sensiblement suivant que la vitesse du fluide est subalfvénique ou superalfvénique. Dans le premier cas, les perturbations produites par le profil remontent le courant; dans le second cas, elles sont entraînées vers l'aval.

Comme par ailleurs les perturbations u et h_x ne demeurent pas petites mais sont de l'ordre de V_∞ et H_∞ , Stewartson a repris l'étude du problème en supposant que ces données sont petites; le profil possède alors une forme quelconque. Le résultat obtenu est le suivant: à l'extérieur des deux parallèles menées par les extrémités de la section d'aire maximum du profil, l'écoulement est uniforme, tandis que le champ magnétique est le gradient d'une fonction harmonique; à l'intérieur des deux parallèles, le fluide est au repos par rapport à l'obstacle et le champ magnétique est la somme du gradient d'une fonction arbitraire et d'une constante qui possède une certaine valeur en amont du corps et une valeur différente en aval. A l'intérieur des deux parallèles, le champ magnétique à l'infini ne se réduit pas au champ uniforme donné; des courants de surface prennent naissance le long des deux parallèles.

ÉCOULEMENT AUTOUR D'UNE SPHÈRE

Certains auteurs ont cherché des écoulements voisins d'un écoulement connu dans le cas de l'aérodynamique. L'écoulement autour d'une sphère aimantée a été traité de cette façon par Ludford et Murray (1960). Le champ magnétique à l'infini est nul, mais la sphère est un dipôle de moment magnétique donné. Les conditions aux limites à la surface de la sphère traduisent la continuité de l'induction magnétique normale et du champ magnétique tangentiel. La solution de Ludford et Murray, valable pour les petites valeurs du moment magnétique M de la sphère et du nombre de Reynolds magnétique R_M , conduit à la valeur suivante pour le coefficient de traînée d'origine magnétique:

$$C_D = \frac{144 \mu'^2}{5(2\mu + \mu')^2} R_M$$

μ et μ' désignent les perméabilités magnétiques du fluide et de la sphère respectivement; β est le quotient de $\mu M^2/2a^6$ (a = rayon de la sphère) par la pression dynamique à l'infini ($\rho_0 U^2/2$); $R_M = Ua\mu\sigma$, σ désignant la conductivité électrique du fluide. Le coefficient de traînée d'origine aérodynamique est négligeable par rapport au précédent.

Bien que la traînée soit indépendante de la résistivité électrique de la sphère, les auteurs pensent que les calculs ne sont plus valables lorsque cette résistivité

électrique est nulle. La condition de continuité du champ magnétique tangentiel à la surface de la sphère doit être abandonnée; un courant de surface prend naissance. Une étude directe conduit à une valeur du coefficient C_D qui est différente, sauf pour $\mu = \mu'$.

LES ÉCOULEMENTS COMPRESSIBLES

Les écoulements stationnaires d'un fluide compressible parfaitement conducteur ont été étudiés par McCune et Resler (1960) dans le cas des champs alignés, à l'aide de la théorie des petites perturbations. Il existe une fonction de courant de perturbation ψ satisfaisant à l'équation suivante:

$$\mathfrak{B} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \quad \mathfrak{B} = \frac{(1 - M_\infty^2)(A_\infty^2 - 1)}{A_\infty^2 + M_\infty^2 - 1}$$

Le type de l'équation dépend du signe de \mathfrak{B} (Fig. 6). Dans les régions 1, 3, 5, l'équation est de type elliptique; dans les régions 2 et 4, elle est de type hyperbolique.

RÉGIMES ELLIPTIQUES

Lorsqu'on a $\mathfrak{B} > 0$, il est possible, comme en aérodynamique, de lier les écoulements compressibles aux écoulements incompressibles par une transformation de Prandtl-Glauert. Le coefficient de portance C_z^* est égal au quotient par $\sqrt{\mathfrak{B}}$ du coefficient de portance C_z relatif à l'écoulement incompressible autour du même profil, avec la même vitesse à l'infini. Alors qu'en aérodynamique subsonique la portance en compressible est toujours supérieure à la portance en incompressible, la comparaison des portances en magnétodynamique des fluides conduit au même résultat pour $\mathfrak{B} < 1$ et au résultat opposé pour $\mathfrak{B} > 1$.

RÉGIMES HYPERBOLIQUES

Lorsqu'on a $\mathfrak{B} < 0$ ($\mathfrak{B} = -\cotan^2 \sigma$), la fonction de courant de perturbation s'exprime sous la forme suivante, dans laquelle F et G désignent deux fonctions arbitraires:

$$\psi(x, y) = F(y - x \tan \sigma) + G(y + x \tan \sigma)$$

Une théorie analogue à celle d'Ackeret peut être développée. Alors qu'en aérodynamique la famille des caractéristiques orientées vers l'aval (lignes de Mach)

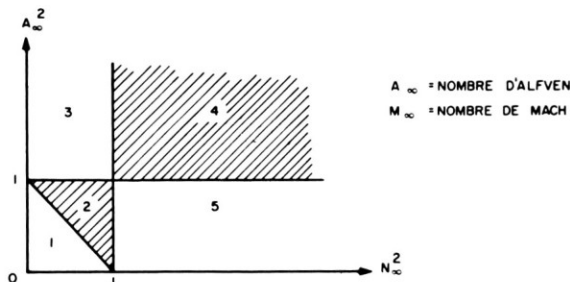


Fig. 6.

doit seule être considérée, rien ne permet d'affirmer qu'il en est de même en magnétodynamique des fluides.

Les droites le long desquelles se propagent les perturbations sont les tangentes au diagramme de Friedrichs (Figs. 7 et 8) issues de l'extrémité du vecteur V_∞ ; le diagramme de Friedrichs représente l'enveloppe du front d'ondes provoqué par une perturbation produite à l'origine. En aérodynamique, ce diagramme est constitué par le cercle centré à l'origine et dont le rayon est égal à la vitesse du son.

Pour $A_\infty > 1$ et $M_\infty > 1$ (région 4, Fig. 6), on obtient deux caractéristiques orientées vers l'aval, comme en aérodynamique supersonique. La composante de la vitesse du fluide suivant la normale à la caractéristique est égale à la vitesse de propagation rapide (Fig. 7).

Pour $A_\infty < 1$, $M_\infty < 1$ et $A_\infty^2 + M_\infty^2 > 1$ (région 2, Fig. 6), on obtient deux familles de caractéristiques orientées vers l'amont et on retrouve le phénomène signalé par Stewartson pour l'écoulement incompressible. Pour discuter la validité des résultats de McCune et Resler, il faudrait envisager les écoulements non stationnaires et étudier leur limite lorsque le temps augmente indéfiniment. La composante de la vitesse du fluide suivant la normale à la caractéristique est égale à la vitesse de propagation lente: Fig. 8.

Les coefficients de portance et de traînée, pour une plaque plane sous l'incidence θ , possèdent les valeurs suivantes:

$$C_z^* = \frac{4}{A_\infty^2} \sqrt{\frac{(A_\infty^2 + M_\infty^2 - 1)(1 - A_\infty^2)}{1 - M_\infty^2}}$$

$$C_x^* = C_z^* \theta$$

Dans le cadre des études des écoulements compressibles, il faut citer un travail de Brainerd (1962), relatif aux écoulements coniques de révolution. Le fluide est un gaz parfait, non visqueux, doué d'une conductivité électrique infinie; l'écoulement est stationnaire à champs alignés. L'écoulement conique de

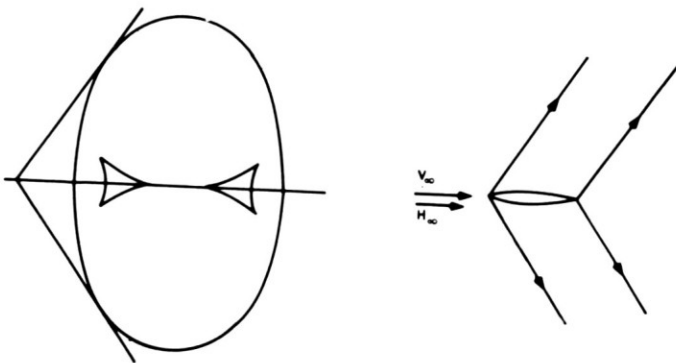


Fig. 7.

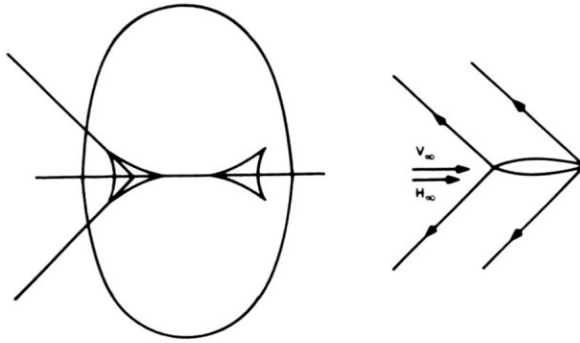


Fig. 8.

révolution avec onde attachée peut être obtenu dans deux cas: régime supersonique superalfvénique et régime subsonique subalfvénique. Dans les deux cas, les équations de l'écoulement sont hyperboliques; dans le premier cas, le choc est rapide; dans le second cas, le choc est lent.

LES ÉCOULEMENTS DANS LES TUYÈRES

Aux problèmes de profils se rattachent les problèmes posés par l'écoulement dans une tuyère. L'introduction de champs électromagnétiques permet de modifier de façon intéressante les écoulements classiques, comme l'ont signalé pour la première fois Resler et Sears (1958).

Les écoulements dans les tuyères sont considérés comme quasi-unidimensionnels, ce qualificatif ayant non seulement un caractère géométrique (les variations de la section droite de la tuyère sont lentes), mais aussi un caractère dynamique; il signifie que l'on néglige toute variation des grandeurs dynamiques ou électrodynamiques caractéristiques de l'écoulement dans une direction transversale à celle de l'écoulement. Les grandeurs interviennent seulement par leur valeur moyenne sur une section droite. Une telle approximation exige en particulier que les variations transversales du champ magnétique soient négligeables par rapport aux variations le long de l'axe de la tuyère.

Les équations du mouvement se déduisent des équations générales. Une première approximation consiste à considérer les champs E et H donnés par un processus extérieur et à négliger les effets électromagnétiques induits par le mouvement. Si on désire tenir compte des champs induits, il faut alors écrire les équations de Maxwell; il y a lieu de se reporter à la forme intégrale et d'introduire la section $Q(x)$ de la tuyère. On obtient ainsi

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{Q}} \frac{\partial}{\partial x} (E \sqrt{Q}) = 0$$

(19)

$$\frac{1}{\sqrt{Q}} \frac{\partial}{\partial x} (H \sqrt{Q}) + \sigma (E - uH) = 0$$

Lorsque le fluide est un conducteur imparfait ($\sigma^{-1} \neq 0$), les petites perturbations des variables aérodynamiques se propagent avec la célérité du son classique, tandis que celles des variables électromagnétiques se propagent avec une vitesse infinie. Dans le cas d'un fluide conducteur parfait ($\sigma^{-1} = 0$), la célérité du son effective est

$$\alpha = \left\{ \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s + \frac{\mu H^2}{4\pi\rho} \right\}^{1/2} \quad (20)$$

La recherche des écoulements stationnaires conduit aux résultats suivants:

CONDUCTEUR PARFAIT

La vitesse effective du son ne peut être atteinte que dans le col et les variations de la pression totale (somme de la pression aérodynamique et de la "pression magnétique") sont analogues à celles obtenues en aérodynamique.

CONDUCTEUR IMPARFAIT

Lorsque la section est constante, le débit est constant, mais l'entropie augmente. Il en résulte que l'écoulement peut avoir des points soniques, atteints pour des vitesses égales à

$$\frac{E}{\mu H} \quad \text{ou} \quad \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{E}{\mu H}$$

Lorsque la section de la tuyère est variable, les possibilités sont nombreuses. L'accélération est la somme d'un terme aérodynamique (auquel elle se réduirait en l'absence de champ électromagnétique) et d'un terme de nature électromagnétique. Suivant les cas, ces deux termes agissant ou non dans le même sens pour accélérer ou décélérer l'écoulement; les effets électromagnétiques peuvent renforcer les effets hydrodynamiques, ou bien les atténuer, ou même les détruire. L'une des caractéristiques essentielles des écoulements est l'existence de points soniques en dehors des extremum de la section droite.

L'étude de la stabilité des écoulements précédents pour ce qui concerne les perturbations du second ordre quasi-unidimensionnelles a été faite par J. Naze (1961). Suivant une méthode due à R. Meyer, le problème se ramène à l'intégration d'une équation différentielle linéaire qui détermine le saut d'accélération sur une onde. L'écoulement est stable si le saut d'accélération demeure fini et tend vers zéro lorsque le temps augmente indéfiniment, instable lorsqu'un choc prend naissance ou lorsque l'écoulement initial n'est pas rétabli au bout d'un temps suffisamment long. Dans le cas des fluides non conducteurs ($\sigma = 0$) ou conducteurs parfaits ($\sigma^{-1} = 0$), les conditions de stabilité s'expriment sous forme de conditions imposées en profil de la tuyère:

$$\begin{array}{l} \text{limite} \\ |x| \rightarrow \infty \end{array} \quad Q(x)|x|^{-n} \rightarrow \infty$$

Les valeurs de l'exposant n sont les suivantes:

à l'aval	$\frac{4}{\gamma - 1}$	$\frac{2}{3}$
à l'amont	2	$\frac{6}{19 - 8\gamma}$
	$\sigma = 0$	$\sigma^{-1} = 0$

Comme on a $\gamma < 2$, les conditions imposées à $Q(x)$ dans le cas non conducteur sont plus fortes que celles imposées à $Q(x)$ dans le cas des conducteurs parfaits. Il en résulte que la prise en considération des phénomènes électromagnétiques accroît la stabilité. Dans le cas des conducteurs imparfaits, aucune condition n'est imposée à $Q(x)$; la discussion, suivant les divers types d'écoulements est assez compliquée. On établit cependant que l'écoulement transsonique décéléré est toujours instable les résultats de Mlle. Naze ont été étendus par Rubin (1963) au cas des perturbation bidimensionnelles.

CONCLUSION

Pour terminer cette revue rapide, je voudrais tout d'abord préciser que les exemples envisagés ne donnent pas une idée complète de la magnétodynamique des fluides. Nous avons choisi quelques problèmes parmi ceux qui sont susceptibles d'intéresser le plus directement l'aéronautique; même avec cette limitation, je n'ai pu donner qu'une bibliographie partielle; il faudrait citer encore les travaux de Chester, relatifs à l'écoulement autour d'un solide de révolution, de Carrier et Greenspan qui ont traité le problème de la plaque plane, de Tamada qui a traité le problème du cylindre circulaire, et de beaucoup d'autres; je les prie de ne pas me tenir rigueur de n'avoir pu les citer tous.

L'intérêt scientifique de la magnétodynamique des fluides apparaît indiscutable, et les résultats atteints montrent que l'on est en mesure d'aborder les problèmes posés, si difficiles soient-ils. Les points les plus discutables et sur lesquels un effort particulier semble encore nécessaire concernent peut-être les hypothèses de départ, certains des résultats surprenant que nous avons indiqués et certaines contradictions ne pouvant être levés que par une précision et peut-être une modification de quelques unes des hypothèses physiques qui conduisent aux équations habituellement adaptées pour résoudre les problèmes de magnétodynamique des fluides. Les conditions aux limites qu'il convient d'adopter sont encore l'objet de discussion. Les quelques aperçus sur la théorie des profils montrent bien quelles sont les difficultés rencontrées. Lorsqu'une solution est trouvée théoriquement, il faut décider si elle correspond ou non à la réalité.

Un point fondamental est donc celui des expériences de laboratoire destinées à reproduire les phénomènes de magnétodynamique des fluides. La difficulté

consiste à produire des champs magnétiques suffisamment intenses et à obtenir un fluide doué d'une conductivité électrique suffisamment grande pour que les phénomènes produits puissent être discernés. Si le mercure est un liquide idéal pour réaliser le dernier point, la difficulté demeure dans le cas des gaz. Sears et Resler (1960) estiment toutefois que la plupart des phénomènes subalfvéniques: sillages orientés vers l'amont, écoulements subsoniques hyperboliques et écoulements supersoniques elliptiques, sont susceptibles de vérifications expérimentales.

Dans les cas qui nous intéressent (vol des fusées, mouvement des satellites), les conditions sont différentes. L'air est légèrement conducteur, car il est ionisé par les substances radioactives et par le rayonnement cosmique, mais la conductivité électrique reste faible (0,1 mho/cm dans les conditions où se trouve un satellite). Le champ magnétique terrestre est également très faible; aux grandes distances, sa distribution est celle d'un dipole de moment magnétique 8×10^{25} cgs, qui serait placé au centre de la terre et dont l'axe percerait la surface en deux points diamétralement opposés aux pôles géomagnétiques. L'utilisation des effets de la magnétodynamique des fluides nécessiterait alors l'accroissement artificiel de la conductivité électrique de l'air au voisinage des fusées ou des satellites, par exemple par l'arrachement de particules au revêtement métallique; elle nécessiterait également la création de champs magnétiques artificiels. Dans les deux cas le poids de l'installation posera de très sérieux problèmes à l'ingénieur.

Il serait toutefois fort imprudent de conclure que la magnétodynamique des fluides offre peu d'intérêt pour l'aéronautique. Le passé nous a appris que toute science peut se développer dans des directions imprévisibles et la magnétodynamique des fluides peut-être l'occasion de nouveaux progrès dans la navigation aérienne et peut-être même jouer un rôle fondamental en astronautique.

Je tiens pour terminer à remercier le professeur Maurice Roy, président de l'International Council of the Aeronautical Sciences de la confiance qu'il m'a témoignée en me demandant de faire cette conférence. Je remercie le professeur Polovin qui m'a apporté une aide indirecte, mais efficace; j'ai fait de larges emprunts au rapport de synthèse qu'il a rédigé sur la propagation des ondes. Le professeur Sears qui dirige à l'Université de Cornell un des plus importants centres de recherches consacrés à la magnétodynamique des fluides m'a fourni une abondante documentation; je le prie de trouver ici l'expression de ma gratitude; la revue des travaux de magnétodynamique des fluides effectués à Ithaca me fut d'une aide précieuse. M. Roger Peyret m'a aidé dans la préparation du manuscrit; je le remercie bien amicalement.

BIBLIOGRAPHIE

Les références soviétiques se rapportent aux articles traduits en anglais; l'année indiquée est celle de la publication en langue anglaise. L'article original fut publié une ou deux années plus tôt.

LIVRES ET ARTICLES SE RAPPORTANT AUX ÉQUATIONS

Alfvén, H., *Cosmical Electrodynamics*, London, Oxford U. P., 1950.

Bershadner, D., *The Magnetohydrodynamics of Conducting Fluids*, Stanford U. P., 1959.

- Braginskii, S., "Transport Phenomena in a Completely Ionized Two-temperature Plasma," *J. Exptl. and Theoret. Phys. (U.S.S.R.)*, 33, 1957, pp. 459-472.
- Cabannes, H., "Théorie cinétique des gaz ionisés: étude des propriétés d'un courant ionique," *ONERA publication 101*, 1961.
- , *Cours de Mécanique générale* (Seconde partie: introduction à la mécanique des fluides) Paris, Dunod, 1962.
- Chapman, S., et T. Cowling, *The Mathematical Theory of Nonuniform Gases*, London, Cambridge U. P., 1939.
- Cowling, T., *Magnetohydrodynamics*, New York, Interscience, 1957.
- Germain, P., "Introduction à l'étude de l'aéromagnétodynamique," *Cahiers de Physique*, 103, 1959, pp. 98-128.
- Goldstein, S., *Lectures on Fluid Mechanics*, New York, Interscience, 1960.
- Kulikovskiy, A. et G. Lijubeniov, *Le Magnétodynamique des Fluides*, Editions d'Etat, Moscow, 1962.
- Landau, L., et E. Lifshitz, *Electrodynamics of Continuous Media*, New York, Pergamon, 1960.
- Landshoff, R., "Transport Phenomena in a Completely Ionized Gas in Presence of a Magnetic Field," *Phys. Rev.*, 76, 1949, pp. 904-909.
- , *Magnetohydrodynamics*, Stanford U. P., 1957.
- Resler, E., et W. Sears, "The Prospects for Magneto-Aerodynamics," *J. Aeron. Sci.*, 1958, pp. 235-245.

PROPAGATION DES ONDES

- Akhiezer, A., G. Liubarskii, et R. Polovin, "The Stability of Shock Waves in Magnetohydrodynamics," *Soviet Physics JETP*, 35, 8, 1959, pp. 507-511.
- Akhiezer, I., et R. Polovin, "The Motion of a Conducting Piston in a Magnetohydrodynamic Medium," *Soviet Physics JETP*, 11, 1960, pp. 383-386.
- Andersen, E., *Magnetohydrodynamic Shock Waves*, M.I.T. Press, Cambridge, 1963.
- Bazer, J., "Resolution of an Initial Shear-flow Discontinuity in One-dimensional Hydromagnetic Flow," *Astrophys. J.*, 128, 1958, pp. 686-712.
- , et W. Ericson, "Hydromagnetic Shocks," *Astrophys. J.*, 129, 1959, pp. 758-785.
- , et O. Fleischman, "Propagation of a Weak Hydromagnetic Discontinuities," *Research Report MH 10*, New York University, 1959.
- Blank, A., et H. Grad, "Fluid Magnetic Equations; General Properties; Notes on Magnetohydrodynamics," *Research Report VI*, New York University, 1958.
- , "Fluid Dynamical Analogies; Notes on Magnetohydrodynamics," *Research Report VII*, New York University, 1958.
- Burgers, J., "Perturbation of a Shock Wave into a Magnetic Field in Magnetohydrodynamics," in *Magnetohydrodynamics*, Landshoff (Ed.), 1957.
- Cabannes, H., "Aéromagnétodynamique. Sur l'attachement des ondes de choc dans les écoulements à deux dimensions," *Compt. Rend. Acad. Sc. Paris*, 250, 1960.
- Cabannes, H., Sur la stabilité des chocs attachés en magnétodynamique des fluides—à paraître au *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* (1964).
- Ericson, W., et J. Bazer, "On Certain Properties of Hydromagnetic Shocks," in *The Physics of Fluids*, 3, 1960, pp. 631-640.
- Ferraro, V., "Hydromagnetic Waves in a Rare Ionized Gas and Galactic Magnetic Fields," *Proc. Royal Soc. London*, 233, 1955, pp. 310-318.
- Friedrichs, K., et H. Kranzer, "Notes on Magnetohydrodynamics: VIII, Nonlinear Wave Motion," *Report N.Y.O. 6486*, New York University, 1958.
- Germain, P., "Contribution à la théorie des ondes de choc en magnétodynamique des fluides," *ONERA Publication No. 97*, 1959.
- Gilberg, D., "The Existence and Limit Behavior of the One-dimensional Shock Layer," *Am. J. Math.*, 73, 1951, pp. 256-274.
- Grad, H., "Propagation of Magnetohydrodynamic Waves without Radial Attenuation," in *The Magnetodynamics of Conducting Fluids*, O. Bershader (Ed.), 1959, pp. 37-60.

- Helfer, H., "Magnetohydrodynamic Shock Waves," *Astrophys. J.*, 117, 1953, pp. 177-199.
- Herfolsen, N., "Magnetohydrodynamic Waves in a Compressible Fluid Conductor," *Nature*, 165, 1950, p. 1020.
- Hoffmann, F., et E. Teller, "Magnetohydrodynamic Shocks," *Phys. Rev.*, 80, 1950, pp. 692-703.
- Iordanskii, S., *Soviet Physics Doklady*, 121, 1958, p. 610.
- Kontorovich, V., "On the Interaction between Small Disturbances and Discontinuities in Magnetohydrodynamics and the Stability of Shock Waves," *Soviet Physics JETP*, 35, 8, 1959, pp. 851-858.
- Lighthill, M., "Studies on Magnetohydrodynamic Waves and Other Anisotropic Wave Motions," *Philos. Trans. Royal Soc. London*, 252, 1960, pp. 397-430.
- Ludford, G., "The Structure of a Hydromagnetic Shock in Steady Plane Motion," *J. Fluid Mech.*, 5, 1959, pp. 67-80.
- Lundquist, S., "Studies in Magnetohydrodynamics," *Arkiv fur Fysik*, 5, 1952, p. 297.
- Lyubarskii, G., et P. Polovin, "Simple Magnetoacoustic Waves," *Soviet Physics JETP*, 35, 8, 1959, p. 351.
- , "The Splitting of a Small Discontinuity in Magnetohydrodynamics," *Soviet Physics*, 8, 35, 1959, pp. 901-902.
- , "The Desintegration of Unstable Shock Waves in Magnetohydrodynamics," *Soviet Physics JETP*, 36, 9, 1959, pp. 902-906.
- Lust, R., "Magnetohydrodynamische Stosswellen in einem Plasma unendlicher Leitfähigkeit," *Zeitschrift für Naturforschung*, 8a, 1953, pp. 277-284.
- , "Stationäre magnetohydrodynamische Stosswellen beliebiger Stärke," *Zeitschrift für Naturforschung*, 10, 1955, p. 125.
- Polovin, R., "Shock Waves in Magnetohydrodynamics," *Soviet Physics Uspekhi*, 3, 1961, pp. 677-688.
- , et G. Liubarskii, "Impossibility of Rarefaction Shock Waves in Magnetohydrodynamics," *Soviet Physics JETP*, 8, 1959, pp. 351-352.
- Rubin, S., Magneto-gasdynamic Channel Flows, Ph.D. thesis, Cornell University, 1963.
- Segre, S., "On the Formation of Magnetohydrodynamic Shock Waves," *Il Nuovo Cimento*, 9, 1958, pp. 1054-1057.
- Syrovatskii, S., "The Stability of Shock Waves in Magnetohydrodynamics," *Soviet Physics JETP*, 35, 8, 1959, pp. 1024-1027.

ECOULEMENTS AUTOUR D'UN PROFIL

- Brainerd, J., "Magnetogasdynamic Cone Flow for the Special Case of Infinite Conductivity and Aligned Fields," Ph.D. Thesis, Cornell University, 1962.
- Chester, W., "The Effect of a Magnetic Field on Stokes Flow in a Conducting Fluid," *J. Fluid Mech.*, 3, 1957, pp. 304-308.
- , "The Effect of a Magnetic Field on the Flow of a Conducting Fluid Past a Body of Revolution," *J. Fluid Mech.*, 10, 1961, pp. 459-465.
- , et D. Moore, "The Effect of a Magnetic Field on the Flow of a Conducting Fluid Past a Circular Disk," *J. Fluid Mech.*, 10, 1961, pp. 466-472.
- Gotoh, K., "Magnetohydrodynamic Flow Past a Sphere," *J. Phys. Soc. Japan*, 15, 1960, pp. 189-196.
- Grad, H., "Reducible Problems in Magneto Fluid Dynamic Steady Flows," *Rev. Modern Phys.*, 32, 4, 1960, pp. 830-847.
- Greenspan, H., "Flate Plate Drag in Magnetohydrodynamic Flow," *Physics of Fluids*, 3, 1960, pp. 581-587.
- , et G. Carrier, "The Magnetohydrodynamic Flow Past a Flat Plate," *J. Fluid Mech.*, 6, 1959, pp. 77-96.
- Gourdine, M., "Magnetohydrodynamic Flow Constructions with Fundamental Solutions," *J. Fluid Mech.*, 10, 1961, pp. 439-448.
- Hasimoto, H., "Viscous Flow of a Perfectly Conducting Fluid with a Frozen Magnetic Field," *Physics of Fluids*, 2, 1959, p. 238.
- , "Magnetohydrodynamic Wave of Finite Amplitude at Magnetic Prandtl Number 1," *Physics of Fluids*, 2, 1959, pp. 575-576.

- , "Magnetohydrodynamic Waves in a Viscous Conducting Fluid," *Rev. Modern Phys.*, 32, 1960, pp. 860-866.
- Imai, I., "On Flows of Conducting Fluids Past Bodies," *Rev. Modern Phys.*, 32, 1960, pp. 992-999.
- Ludford, G., "The Effect of a Very Strong Magnetic Cross-field on Steady Motion through a Slightly Conducting Fluid," *J. Fluid Mech.*, 10, 1961, pp. 141-155.
- McCune, J., "On the Motion of Thin Airfoils in Fluids of Finite Electrical Conductivity," *J. Fluid Mech.*, 7, 1960, pp. 449-468.
- , et E. Resler, "Compressibility Effects in Magnetodynamic Flows Past Thin Bodies," *J. Aerospace Sci.*, 27, 1960, pp. 493-503.
- Mitchner, M., "Magnetohydrodynamic Flow with a Transverse Magnetic Field," in *The Magnetodynamics of Conducting Fluids*, D. Bershader (Ed.), Standorf U. P., 1959, pp. 61-90.
- Peyret, R., "Sur une correspondance entre certains écoulements de magnétodynamique des fluides et ceux de la dynamique des gaz," *C.R. Acad. des Sci.*, t. 250, 1960, pp. 1971-1973.
- , "Sur les régimes de transition dans certains écoulements d'un fluide parfaitement conducteur," *Compt. Rend. des Séances de l'Acad. des Sciences de Paris*, 252, 1961, pp. 2816-2818.
- Resler, E., et J. McCune, "Electromagnetic Interaction with Aerodynamic Flows," in *The Magnetodynamics of Conducting Fluids*, D. Bershader (Ed.), 1959, pp. 120-135.
- , "Some Exact Solutions in Linearized Magnetoaerodynamics for Arbitrary Magnetic Reynolds Numbers," *Rev. Modern Phys.*, 32, 1960, pp. 848-854.
- Sears, W., "Magnetohydrodynamic Effects in Aerodynamic Flows," *ARS Journal*, 29, 1959, pp. 397-406.
- , "Some Remarks about Flow Past Bodies," *Rev. Modern Phys.*, 32, 1960, pp. 701-705.
- , "Subalfvenic Flow in Magnetoaerodynamics," *J. Aerospace Sci.*, 28, 1961, pp. 249-250.
- , "High Field Effects in Magnetohydrodynamics," *International Conference on High Magnetic Fields* (1962).
- , "Some Paradoxes of Sub-Alfvenic Flow of a Compressible Conducting Fluid," *Symposium on Electromagnetics and Fluid Dynamics of Gaseous Plasma* (1962).
- , et E. Resler, "Theory of Thin Airfoils in Fluids of High Electrical Conductivity," *J. Fluid Mech.*, 5, 1959, pp. 257-273.
- , "Sub- and Super-Alfvenic Flows Past Bodies," *Adv. in Aeron. Sci.*, 4, 1961, pp. 657-674.
- Stewartson, K., "On the Motion of a Non-conducting Body through a Perfectly Conducting Fluid," *J. Fluid Mech.*, 8, 1, 1960, pp. 82-96.
- Tamada, K., "On the Distortion of a Weak Magnetic Field by the Flow of a Conducting Fluid Past a Cylindrical Obstacle," *AFOSR 1551*, 1961.
- , "On the Flow of a Slightly Conducting Fluid Past a Circular Cylinder with Strong Aligned Magnetic Field," *AFOSR*, 1962.
- Yosinobu, H., "A Linearized Theory of Magnetohydrodynamic Flow Past a Fixed Body in a Parallel Magnetic Field," *J. Phys. Soc. Japan*, 15, 1960, pp. 175-188.

